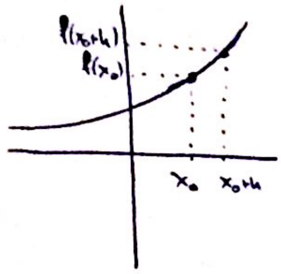
Ορισμός: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ (I διάστημα), $x_0 \in I$. Η f λέγεται <u>παραγωγίσιμη στο x_0</u> αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός.

Το συμβολίζουμε με $f'(x_0)$ (ή $\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$ ή $\frac{df}{dx}(x_0)$)

Ισοδύναμα $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h}$

Σημείωση: α) Υπάρχει περίπτωση το παραπάνω όριο να είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $f'(x_0)=-\infty$ ή $f'(x_0)=+\infty$, αλλά λέμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

β) Αν το x_0 είναι άκρο του διαστήματος I (π.χ. $I=[a,b]$, $x_0=a$ ή $x_0=b$) το παραπάνω όριο είναι πλευρικό.



Η παράγωγος στο x_0 είναι η οριακή κλίση της ευθείας που περνά από τα $(x_0, f(x_0))$, $(x_0+h, f(x_0+h))$

Παραδείγματα: (Υπολογισμοί Παραγώγων)

1) $f(x)=c$, $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} = 0$

$f'(x)=0$

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$

$f'(x)=1 \ \forall x\in\mathbb{R}$

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x_0^2+2hx_0+h^2-x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0$

$f'(x)=2x \ \forall x\in\mathbb{R}$

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^n$, $n\geq 3$, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{((\cancel{x}+\cancel{h})-\cancel{x})((x+h)^{n-1}+\dots+x^{n-1})}{\cancel{h}} =$

$= \lim_{h\to 0}(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}\cdot x+\dots+x^{n-1} = \underbrace{x^{n-1}+\dots+x^{n-1}}_{n\text{-φορές}} = n\cdot x^{n-1}$

$f'(x) = n\cdot x^{n-1} \ \forall x\in\mathbb{R}$

$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

5) $f(x)=e^x$, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot e^h-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x\frac{e^h-1}{h} = e^x\cdot 1 = e^x$

$f'(x)=e^x$.

6) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\log x$.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\log\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x\cdot\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}$$

Έχουμε δει ότι $\lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t}=1$

Επίσης, $\lim_{h\to0}\frac{h}{x}=0$

$\Rightarrow \lim_{h\to0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}=1$

$f'(x)=\frac{1}{x}\ \forall x\in(0,+\infty)$

Παρατήρηση: (Καραθεοδωρή)

Έστω συνάρτηση $f:I\to\mathbb{R}$, x_0 εσωτερικό σημείο του I και $f:I\to\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει $\varphi:I\to\mathbb{R}$ συνεχής στο x_0 με $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ για $x\neq x_0$

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε πως η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Ορίζουμε $\varphi:I\to\mathbb{R}$ με $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0\\ f'(x_0), & x=x_0\end{cases}$

Τότε $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=\varphi(x_0)$.

Άρα, η φ συνεχής στο x_0.

($\Leftarrow$) Επειδή η φ συνεχής στο x_0 συμπεραίνουμε ότι

$\varphi(x_0)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Άρα, η f είναι συνεχής στο x_0 και $f'(x_0)=\varphi(x_0)$.

Πρόταση: Έστω $f: I\to\mathbb{R}$, x_0 σημείο του I. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

Απόδειξη:

Από την προηγούμενη παρατήρηση $\exists\varphi:I\to\mathbb{R}$ συνεχής με $\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και μάλιστα $\varphi(x_0)=f'(x_0)$.

$\Rightarrow f(x)=f(x_0)+\varphi(x)\cdot(x-x_0)$ για $x\neq x_0$

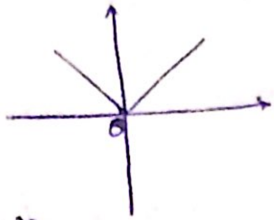
Επίσης, η σχέση αυτή ισχύει για $x=x_0$ (διότι για $x=x_0$ και τα δύο μέλη είναι ίσα με $f(x_0)$).

Έτσι, $$f(x)=\underbrace{\underbrace{f(x_0)}_{\substack{\text{συνεχής}\\ \text{στο } x_0\\ \text{ως σταθερή}}}+\underbrace{\underbrace{\varphi(x)}_{\substack{\text{συνεχής}\\ \text{στο } x_0}}\underbrace{(x-x_0)}_{\substack{\text{συνεχής}\\ \text{στο } x_0}}}_{\text{συνεχής στο } x_0}}_{\text{συνεχής στο } x_0.}$$

Άρα, η f είναι συνεχής στο x_0.

Παράδειγμα: Το αντίστροφο δεν ισχύει δηλαδή $\exists$ συναρτήσεις που είναι συνεχείς σε κάποιο σημείο αλλά όχι παραγωγίσιμες σε αυτό.

Π.χ. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=|x|$
Η f είναι συνεχής στο 0
(Θεωρ. εσο. Ορίζατε δ...)



$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{|x|-|0|}{x-0}=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\frac{x}{x}=1, & x>0\\ \frac{-x}{x}=-1, & x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1\neq\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$$

Άρα, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ δεν έχει όριο στο 0 που σημαίνει πως η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Ορισμός: Έστω $f:I\to\mathbb{R}$ (I διάστημα), x_0 εσωτερικό σημείο του I.

➡ Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θα λέγεται παράγωγος της f από τα δεξιά στο x_0 και θα συμβολίζεται με $f'_+(x_0)$.

➡ Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ θα λέγεται παράγωγος της f από τα αριστερά στο x_0 και θα συμβολίζεται με $f'_-(x_0)$.

Παρατηρήσεις:

1) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
2) Αν το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του I, $f:I\to\mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχουν οι δύο πλευρικές παράγωγοι $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί, ίσοι μεταξύ τους.
3) Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μπορεί η f να είναι ή να μην είναι παραγωγίσιμη από τα δεξιά στο a. Δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για παράγωγο από τα αριστερά της f στο a. Ομοίως, δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για παράγωγο της f από τα δεξιά στο b.

Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής:

Έστω ότι ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος μιας ευθείας και η θέση του τη χρονική στιγμή t δίνεται από μια συνάρτηση $S(t)$.
Σταθεροποιούμε το t_0.
Το χρονικό διάστημα $[t_0,t]$ $t>t_0$ η μετακίνηση του σωματιδίου $S(t)-S(t_0)$ για το μήκος του χρονικού διαστήματος είναι $t-t_0$.
Ο λόγος $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$ εκφράζει τη μέση ταχύτητα του σωματιδίου, το χρονικό διάστημα $[t_0,t]$ για $t>t_0$. Το ίδιο για $t<t_0$.

Το όριο $\lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$ είναι η στιγμιαία ταχύτητα $u(t_0)$ του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή t_0, δηλαδή $u(t_0) = S'(t_0)$

Ομοίως, η στιγμιαία επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_0, είναι $a(t_0) = u'(t_0) = S''(t_0)$.

Υπολογισμός της παραγώγου της $f(x) = \sin x$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} =$$

$$= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \frac{\sin h}{h} \cdot \cos x \xrightarrow{h \to 0} \sin x \cdot 0 + 1 \cdot \cos x = \cos x$$

Ξέρουμε, $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.

$$\cos h = \cos\left(2\frac{h}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{h}{2}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1} - 2\sin^2\frac{h}{2} - \cancel{1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin\frac{h}{2} \cdot \sin\frac{h}{2}}{2 \cdot \frac{h}{2}} =$$

$= -1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$. Συνεπώς, $(\sin x)' = \cos x$.

Υπολογισμός της παραγώγου της $g(x) = \cos x$.

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \xrightarrow{h \to 0} \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

Συνεπώς, $(\cos x)' = -\sin x$.